第1章　　数と式

II.数と式の性質

9.整数問題

《前置き》

はい、今日は!　いや、お早うかな?　それとも、今晩は?

今日は代数編第 7 回目の授業で、高校の教科書には出てきません。出てこないということは学ぶ必要がない、ということではありません。高校の教科書に出てこないということは、小学校や中学校の知識で十分解けるか、あるいは高校生ならこれくらいはできるでしょ、ということですよ。だから、センター試験にも他の問題との融合問題として、枝問で毎年 1 問は出ていますね。

ここに入る前に、もう一度、第 3 回のテキストと授業を見直してください。ほとんどが約数･倍数に関連する問題です。考えるのが苦手な人にとっては少し難しいかも知れません。逆に、物の性質をしっかりと覚えていて、考えるのが好きな人に取ってはそれほど難しくはありません。

この単元は、毎年生徒から質問が出てくる単元です。ポイントは、正面からぶつかって駄目なときは少しひねって物事を見るようにしましょう。「ひねって」であって「ひねくれて」ではありませんよ。

さあ、今回も頑張りましょう。

《第 7 回授業》整数問題

はい、それではいきます。

例題の【1】を見てください。

(1)は、今までやってきた剰余類の知識を使って証明します。(2)は、約数･倍数の知識を使って証明します。

(1)に移る前に、知識の復習をしておきます。

剰余類の授業でやりましたが、「ある数 A は、1 以外の整数 k で割ったとき、$kn,\ kn+1,\ kn+2,\ \cdots,\ kn+(k-1)$ で表され、k 通りある」というのがありました。特に、2 の剰余類は $2n,\ 2n+1$ で表され、2 で割り切れる $2n$ の集合を偶数（even numbers）といい、2 で割り切れない $2n+1$ の集合を奇数（odd numbers）といいます。これを拡張して、負の数にも適用され、0 は偶数扱いとなります。3 の剰余類は、$3n,\ 3n+1,\ 3n+2$ で 3 通りあります。まあ、$2n+1$ の代わりに $2n-1$ を使ったり、$3n+1,\ 3n+2$ の代わりに $3n-1,\ 3n-2$ を使う場合もあります。これは、n の範囲によって変わります。

さて、(1)に移ります。

(1)「連続した 2 つの整数の平方の差は奇数である」を証明せよ。

という問題ですね。

はい、ここの「連続した」の意味ですが、「続いている」という意味ですね。そんなんわかってる、って言う人も「式で表せ」と言われれば、「…」となる場合が多いようですね。表し方は幾通りもありますが、例えば、$n,\ n+1$ もそうですね。数字は 1 ずつ増えますから、$n+1,\ n+2$ とかいろいろ表し方があります。ここでは、最も簡単な $n,\ n+1$ を使ってみます。問題文の表現は、国語の面から言えばわかりにくい表現ですが、厳密性を重視する数学特有の言い回しですから早くそれに慣れましょう。英語の時間にも言っていますが、日本語は厳密性に乏しい言語です。逆に言うと、数学の説明には、どちらかと言えば不向きな言語なので、必然的に難しい表現になります。「連続した 2 つの整数の平方の差」となっていますが、分けて考えましょう。「連続した 2 つの整数」と「平方」と「差」に分けましょう。「連続した 2 つの整数」は、先ほど説明したように、$n,\ n+1$ です。これの「平方」ですから、それぞれ 2 乗して $n^2,\ (n+1)^2$ です。これの差ですから、大きい方から小さい方を引きます。$n<n+1$ ですから、$n^2<(n+1)^2$ で、大きい方は $(n+1)^2$ です。だから、

$$\begin{aligned}&(n+1)^2-n^2\\=&\left(n^2+2n+1\right)-n^2\\=&2n+1\end{aligned}$$

そら、計算した結果が $2n+1$ で、最初に説明したようにこれは奇数です。

これらを相手にわかるように書くのが答案です。答案というものは、自分の考えを相手に伝えるためのものですから、わかりやすく書かなければなりません。式だけを羅列した答案は「独りよがりの答案」ということで、大学入試では答案とは見なされません。社会に出て会社に入ったら、顧客を説得する説明書などにこういう答案の書き方は必要になります。

注意点としては、問題文で与えられていない文字を使う場合は、最初にそれを定義しなければなりません。これは、例えば取扱説明書を会社で作る場合も同じです。知識のない人に DVD レコーダーの使い方を説明するときに、いきなり横文字の羅列があったりしたらわからないとのと同じです。それを一つ一つ丁寧に説明するマニュアルの書き方というものは、こういう大学入試の記述式答案で試されているのです。それ故、記述式答案が入試にあるような大学は、将来を見越した教育をやっているといっても良いくらいです。

この問題でいうと、n の定義を最初に書いておかなければなりません。問題文に出てきていない文字を使う場合は、最初に定義しなけ

ればなりません。それがルールです。機器の取扱説明書（トリセツ）にもそれが欲しいところです。だからわからないマニュアルを添えてある機器の担当者は、数学の答案が書けなかった人に違いありません。と、私は思いますよ。

はい、それでは解答を書いておきます。

〔解答〕

連続した 2 つの整数を $n,\ n+1$ で表すとする。

このとき、条件より、

$$\begin{aligned}&(n+1)^2-n^2\\=&\left(n^2+2n+1\right)-n^2\\=&2n+1\end{aligned}$$

よって、連続した 2 つの整数の平方の差は奇数である。

最後の結論のところでは、与えられた命題をそのまま書くのが原則です。ただし、この問題文のように結論が短い場合はそのまま書くことができますが、長い場合は「よって題意は証明された」のような書き方も認められています。

この結論文を書くことで、証明は終わりということがわかりますが、ときどき中学校や高校の先生で最後に「〃」と証明の印のようなものを書いている先生がときどき見受けられますが、これは認められません。数学にせよ、どんな学問でも「一つの記号には一つの意味しか持たせない」という意味で「記号の一意性」を原則としています。「記号の一意性」がなければ厳密性が保てないからです。この「〃」の意味は「平行」を表す記号であってそれ以外には使ってはいけません。それでも敢えて終わりの記号を書きたいというのであれば、「〈証明終わり〉」とか「Q.E.D.」と書くようにしましょう。まあ、「〈証明終わり〉」が妥当なところでしょう。「Q.E.D.」については、ラテン語ですが英語の辞書に載っているので調べてみてください。ある有名大学の入試では、この「Q.E.D.」が書かれていなければ減点となります。どこの大学かは言いません。入試担当委員から直接聞いたことなので、その大学を希望している人がいればその人にだけ伝えておきます。そうでなければ秘密は墓場まで持っていきます。それは、ちょっと大げさか…。

はい、それでは(2)に移ります。

(2)「$n^4+2n^3+11n^2+10n$ が 24 の倍数であることを証明せよ。」

これはどこだったかなぁ、ずいぶん前の入試問題です。おそらく京都府立医科大学の入試問題だったと思うけど、間違ってたらゴメンね。30 年近く前の問題だったと思う。

問題を見たときに、すぐに式の $n^4+2n^3+11n^2+10n$ に目が行く人は、まだ算数の域を脱していません。「24 の倍数」に目が行く人にとっては、方針はすぐ見つかります。証明できるかどうかは別ですよ。数字や文字よりも、文章の意味するところに目が行くようにしましょう。だから、数学といえども、読解力が要求されますよ。

ここで、第 3 回の授業「約数･倍数」のときを思い出してください。忘れた人は、第 3 回の重要事項ファイルを見てください。

え～と、「4.約数･倍数」の「(4)倍数の見分け方」の「(ii)連続整数の積」の「(c)連続 4 整数の積」のところです。

連続 4 整数の積 $n(n+1)(n+2)(n+3)$ は、24 の倍数ですね。ここに、「24 の倍数」というキーワードが出ています。「24 の倍数」が出てきたら、「連続 4 整数の積」を思い浮かべるか、「3 の倍数かつ 8 の倍数」を思い浮かべるか、とにかくどちらかが頭の中で閃くようにしましょう。それが「身に付ける」という意味です。

はい、ここまででこの問題の証明の方針は決まりました。

つまり、問題の式を連続 4 整数の式に因数分解すればよいわけですね。

はい、それでは因数分解に取りかかりましょう。

$$\begin{aligned}&n^4+2n^3+11n^2+10n\\=&n\left(n^3+2n^2+11n+10\right)\end{aligned}$$

ここでストップしてもかまいません。まだ学習していない範囲ですから。代数編の重要事項ファイルの「Ⅲ.式の計算」の「1.整式の四則演算」の「(3)整式の除法」の「(ⅰ)因数分解」の「(b)因数分解の手順」の「ⓑ応用形」の「⑥3 次以上の式は、因数定理」を見てください。いま、4 次式を n で括って 3 次式に変えた頃だから、この⑥に当てはまります。

はい、次に同じ「(3)整式の除法」の「(ⅴ)因数分解」の「(b)因数定理」を見てください。そこに書かれている「整式 $f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったとき、割り切れるならば $f(\alpha)=0$ 」は、必要十分条件を満たすので、「整式 $f(x)$ が $f(\alpha)=0$ を満たすならば、整式 $f(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる」と言い換えても同じです。これを「同値である」と言います。こういう内容については、「論理編」で学びましょう。

戻ります。だから、ここで $f(n)=n^3+2n^2+11n+10$ とおきます。この式ではすべての項の符号が＋ですから、n に正の数を代入しても 0 にはなりません。だから、$n=-1$ を代入してみます。

$$\begin{aligned}f(-1)&=(-1)^3+2\cdot(-1)^2+11\cdot(-1)+10\\&=-1+2-11+10\\&=0\end{aligned}$$

で、0 になります。つまり、$f(n)$ は $n+1$ で割り切れるということになります。言い換えれば、$n^3+2n^2+11n+10$ は $n+1$ を因数に持つということです。式で書けば、

$$n^3+2n^2+11n+10=(n+1)\left(n^2+\alpha n+\beta\right)$$

ということです。右辺を展開してみると、

$$n^3+2n^2+11n+10=n^3+(\alpha+1)n^2+(\alpha+\beta)n+\beta$$

係数を比較して、

$$\alpha+1=2,\ \alpha+\beta=11,\ \beta=10$$

この連立方程式を解くと、$\alpha=1,\ \beta=10$ が求められます。つまり、

$$n^3+2n^2+11n+10=(n+1)\left(n^2+n+10\right)$$

これで、さっきの式の変形は、

$$\begin{aligned}&n^4+2n^3+11n^2+10n\\&=n\left(n^3+2n^2+11n+10\right)\\&=n(n+1)\left(n^2+n+10\right)\qquad\cdots*\end{aligned}$$

となりますね。ここまでできれば、まあ半分というところでしょうか。おそらくこれが入試問題に出たときは、方針がわかっていてもここで止まってしまった受験生が多かったのではないかと推測されます。

話は変わりますが、中学数学と高校数学の違いは何でしょうか。内容は当然違いますが、大きな違いは何でしょうか。

中学校では、問題文の通りやっていけば自然と解答に到達しました。しかし、高校では、問題文の言うとおりやっても答になかなか到達しません。工夫が必要です。例えば、高 1 の 1 学期に学ぶ 2 次関数の平方完成がそうです。$(\ )^2$ にならない式を無理矢理$(\ )^2$ に変形するのですね。つまり、「答の形を想定して、その答の形になるように無理矢理変形する」ことが必要になります。これは、高 2・高 3 と続いていきます。だから、高 1 の 1 学期に学んだ内容は夏休み中に復習して完全に自分のものにしておかないと、高 2・高 3 と苦しむことになります。ゆえに「高校の数学の成績は、高 1 の 1 学期で決まる」といっても過言ではありません。こういう「答の形を想定して、その答の形になるように無理矢理変形する」という方法は、会社で仕事をする上でも必要となります。また推理小説などはプロットを作るときに途中の過程を結論に合わせて変形するはずです。よく知りませんけど…。なのに、2 次関数を必要ないという人を中教審の委員に選ぶこと自体が間違っていると言わざるを得ません。そのために、ファンだったのにその人の小説を読まなくなってしまいました。

あ、また文句になってしまった。ごめんなさい。

戻ります。

答の形は、連続 4 整数の積なので $n(n+1)(n+2)(n+3)$ が基本ですが、連続 4 整数ということから、$(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)$ でも構いません。いずれにしても、答の形は連続 4 整数の積になることはわかっています。

ここで、もう一度*印の式をよく見てください。$n(n+1)$ の項はすでに存在しています。この因数を含む連続 4 整数を考えてみましょう。

$$(n-2)(n-1)n(n+1)\qquad\cdots①$$
$$(n-1)n(n+1)(n+2)\qquad\cdots②$$
$$n(n+1)(n+2)(n+3)\qquad\cdots③$$

の 3 通りあります。

「科学する」の「④比較対象」を思い出してください。

共通点は $n(n+1)$ で、それ以外の相違点は、

$$①は、(n-2)(n-1)\qquad\cdots①'$$
$$②は、(n-1)(n+2)\qquad\cdots②'$$
$$③は、(n+2)(n+3)\qquad\cdots③'$$

です。

さっきの n^2+n+10 が、この中のどれになるか、それがポイントです。

①'〜③'を展開してみますよ。

$$①'は、\ n^2-3n+2$$
$$②'は、\ n^2+n-2$$
$$③'は、\ n^2+5n+6$$

ですね。

さっきの n^2+n+10 と共通点が多いのは、②'の n^2+n-2 ですね。

そこで、無理矢理この形に因数分解します。

$$\begin{aligned}&n^2+n+10\\&=n^2+n-2+12\\&=\left(n^2+n-2\right)+12\\&=(n-1)(n+2)+12\end{aligned}$$

このとき、10 を –2+12 と因数分解できるように無理矢理形を変えています。

そうすると、最初からの式の変形は、

$$
\begin{aligned}
&n^4+2n^3+11n^2+10n\\
&=n\left(n^3+2n^2+11n+10\right)\\
&=n(n+1)\left(n^2+n+10\right)\\
&=n(n+1)\left\{(n-1)(n+2)+12\right\}\\
&=n(n+1)(n-1)(n+2)+12n(n+1)
\end{aligned}
$$

さあ、あと一息ですよ。前半を少し並べ替えて$(n-1)n(n+1)(n+2)$とすると、そら、連続 4 整数の積になっています。だから、前半の項は、24 の倍数です。それでは、後半はどうでしょうか。後半の$n(n+1)$は偶数、つまり 2 の倍数だから、それの 12 倍は 24 の倍数ですね。24 の倍数＋24 の倍数だから、全体は 24 の倍数です。

後は、答案の書き方です。
解答を見て、実際に自分で鉛筆を持ってやってみましょう。
〔解答〕

$$
\begin{aligned}
&n^4+2n^3+11n^2+10n\\
&=n\left(n^3+2n^2+11n+10\right)\\
&=n(n+1)\left(n^2+n+10\right)\\
&=n(n+1)\left\{(n-1)(n+2)+12\right\}\\
&=(n-1)n(n+1)(n+2)+12n(n+1)
\end{aligned}
$$

ここで、$(n-1)n(n+1)(n+2)$は、連続 4 整数の積だから 24 の倍数である。
一方、$n(n+1)$は 2 の倍数なので、$12n(n+1)$は、24 の倍数である。
よって、与式は 24 の倍数である。

この問題が証明できたのは、どうしてでしょうか。
以前の生徒がよく言っていましたが、「数学は 1 行目を書くのが難しい」。確かにそうです。解答の方針が定まらなければ 1 行目は書けないからです。この問題を証明できたのは、「24 の倍数＝連続 4 整数の積」という答の形がわかっていたからです。その答の形に無理矢理変形することで証明できました。典型的な高校数学の本質を問うてきた良問です。だから、この問題は、私も暗記しています。「答が正しいかどうか」、そんなことはどうでもいいんです。考え方が正しければ、自然と正しい答に導かれるからです。だから、「なぜ数学を学ぶか」という問いに対する答は、「考え方の道筋を学ぶために数学を学んでいる」です。その表現方法が数字や文字式というだけで、計算をするのが目的ではありません。そこのところ、十分注意して数学を学んでください。

はい、それでは【2】に移ります。

【2】の問題文をよく読んでください。先ほど言いましたが、「方程式を解け。」に目が行くのではなく、「x, y, zが自然数のとき」という条件に目が行くようになれば、物事の理解力が高校生並みということです。何度も言いますが、問題を解くことが問題ではありません。条件の使い方に注意を払えるようにしましょう。今日の授業の初めの方でも言いましたが、条件があってこそ物事は成り立つのです。
はい、ここで「自然数」というのが何だったか思い出してください。自然数の定義を忘れた人は、第 1 回の重要事項ファイルを見直しましょう。自然数の定義は、「正の整数」ですね。つまり、自然数は、整数の集合の中に含まれています。つまり、自然数の問題というのは、整数の問題でその中の正の整数の問題ということですね。だから、「自然数」という条件が与えられていれば、その必要条件である「整数」問題として解いていくことが必要となります。そこで、問題では「自然数」という条件ですが、【2】は「自然数」として解き、そのうえ「整数」という条件まで広げられたときについても解説していこうと思います。

はい、それでは(1)の問題を見てください。
(1) $x^2-y^2=12$
重要事項ファイルの中にこの解法は載っていますか。
載せるのを忘れたわけではありません。私立高校の入試問題などにも出るくらい基本的な整数問題だからです。

ここで、整数方程式の基本について説明しておきます。重要事項ファイルの(2)整数方程式の(ⅰ)と(ⅱ)は、共通しています。同値の問題だからです。整数方程式の基本は、大まかに分けて 2 通りあります。重要事項の(ⅰ)と(ⅱ)のパターン、(ⅲ)のパターンの 2 通りです。(ⅰ)と(ⅱ)のパターンは、基本的には「因数分解して表を書く」と覚えましょう。ついでに言っておくと、(ⅲ)のパターンは、「公約数を見つけて括る」です。

はい、それでは(1)に移ります。重要事項に当てはまらないということは、左辺を因数分解してみます。

$$
\begin{aligned}
&x^2-y^2=12\\
&(x-y)(x+y)=12
\end{aligned}
$$

できましたか。ここで条件です。「x, yが自然数」なので、$x-y$は整数、$x+y$は自然数です。これは、「群」という考え方です。「自然数は、和･積について閉じている」というのは、自然数どうしの和･積は自然数であるということです。差は自然数とは限りませんね。例えば、$2-3=-1$は自然数ではなく整数になります。だから差については開いている、という表現をします。「整数は、和･差･積について閉じている」というのは、整数どうしの和･差･積は整数であるということです。例えば、$2\div3$は整数ではありません。だから、$x-y$は整数、$x+y$は自然数なのです。ここで、$x+y$は自然数なので、常に正です。

この因数分解した式をよく見てください。左辺$(x-y)(x+y)$に対して、右辺12は正の数です。左辺と右辺が等しいので、つまり＝で結ばれているので、左辺も正の数でなければなりません。つまり、$(x-y)(x+y)>0$となります。このとき、$x+y$は自然数なので、常に正だから$x-y$も正の数になります。だから、この場合は結局、$x-y$も$x+y$も自然数というわけですね。この部分は、考え方なので答案には入りません。しかし、ある程度の説明は必要になります。それは、後の解答で確認してください。

さて、ここまでよろしいですか。

$(x-y)(x+y)=12$で、「x, yが自然数」ということから、掛けて12になる自然数の組合せを考えればよいわけです。それを表にします。この表が、重要事項の(ｉ)にある表です。

掛けて12になる2つの自然数は、$(1, 12), (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6,2), (12, 1)$の6通りあります。

ちょっと待ってください。こんなん全部表にしていたら、面倒くさいので、ちょっと頭を捻って考えてみます。

$x-y$と$x+y$について、「x, yが自然数」なので、$x>0, y>0$ですね。ということは、等式の性質から、$x-y<x+y$が常に成り立ちます。ということは、さっきの6通りが半分に減るということになります。表の$x-y$の方には、$x+y$より小さい数を書き込めばよいわけです。

$x-y$	$x+y$	x	y
1	12		
2	6		
3	4		

ここまでよろしいですか。$x-y<x+y$に気を付ければ、半分で済みます。

あとは、左2列の表から、連立方程式を解きます。

つまり、$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=12 \end{cases}, \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=6 \end{cases}, \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$

の3つの連立方程式です。その解を表に書き込んでみましょう。

$x-y$	$x+y$	x	y
1	12	$\frac{13}{2}$	$\frac{11}{2}$
2	6	4	2
3	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$

はい、できましたか。でもまた答ではありませんよ。ほんまに何度も言いますが、条件に気を付けてください。「x, yが自然数」という条件を忘れないようにしましょう。この条件から、$(x, y)=\left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right), (x, y)=\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$は不適だとわかります。だから、答は$(x, y)=(4, 2)$です。

はい、それでは解答を書いておきます。さっきも言ったように、書き方に注意してください。

〔解答〕

$$x^2-y^2=12$$
$$(x-y)(x+y)=12$$

ここで、x, yが自然数であることと、右辺が正であることより、

$x-y, x+y$ともに自然数である。

また、$x-y<x+y$より、

$$(x-y, x+y)=(1, 12), (2, 6), (3, 4) \quad \cdots①$$

この連立方程式を解くと、

$$(x, y)=\left(\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right), (4, 2), \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \cdots②$$

x, yは自然数だから、

$$x=4, y=2$$

当然、表を書いても構いません。その場合は、上の解答の①から②の3行の代わりにさっきの表を入れればよいでしょう。

よろしいですか。
それでは、この問題の条件を「x, yが整数」としてやってみましょう。
解答だけ書いておきます。
〔解答〕

$$x^2-y^2=12$$
$$(x-y)(x+y)=12$$

ここで、x, yが整数で、かつ$x-y, x+y$が同符号だから、
ともに正の場合は$x-y<x+y$であり、ともに負の場合は$x-y>x+y$である。

$x-y$	$x+y$	x	y
1	12	$\frac{13}{2}$	$\frac{11}{2}$
2	6	4	2
3	4	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$
−1	−12	$-\frac{13}{2}$	$-\frac{11}{2}$
−2	−6	−4	−2
−3	−4	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$

表より、$(x, y)=(\pm4, \pm2)$　ただし複号同順

質問はありませんか。
解答の 3 行目後半から 4 行目にかけての 2 行がポイントです。これで労力を減らしています。

はい、それでは⑵に移ります。
⑵$xy-x-y=9$
はい、これは重要事項の(ｉ)のパターンですね。
とにかく、左辺を無理矢理因数分解することですね。それから考えましょう。無理矢理形を決めていくのが高校数学の特徴ですね。無理矢理因数分解するときの考え方から説明しましょう。
①xyの項があることから、因数分解すると$(x-\alpha)(y-\beta)$の形になるはずである。
②①の$(x-\alpha)(y-\beta)$を因数分解すると、xの項は$-\beta x$。問題の式のxの項は$-x$だから、$\beta=1$
③①の$(x-\alpha)(y-\beta)$を因数分解すると、yの項は$-\alpha y$。問題の式のyの項は$-y$だから、$\alpha=1$
④よって、因数分解した形の式は、$(x-1)(y-1)$
⑤④の$(x-1)(y-1)$を展開すると$xy-x-y+1$だから、問題の式の両辺に 1 を加える。
これだけのことを、考えるわけですね。実際は、一瞬です。慣れれば、本当に一瞬でできるようになります。ただし、xyの項の係数が 1 でないときは、例えば$6xy$などとなっていれば、

$(x-\alpha)(6y-\beta)$
$(2x-\alpha)(3y-\beta)$
$(3x-\alpha)(2y-\beta)$
$(6x-\alpha)(y-\beta)$

の中から、x, yそれぞれの係数から決めていくことになります。この種の問題は、演習で練習しましょう。

はい、とりあえず次に進みます。上記⑤の「問題の式の両辺に 1 を加える」ことから、問題の式の両辺に 1 を加えて見ます。

$xy-x-y\quad=9$
$xy-x-y+1=10$
$(x-1)(y-1)=10$　　…*

と、なります。この形を見て、「おや?」と思った人はいますか。そうですね。⑴の問題の形ですね。「掛けたもの＝自然数」という形になっています。これがパターンなんですね。だから、問題の式を変形して、「掛けたもの＝自然数」という形にできれば、後は表を書くだけです。

ここで、条件に戻ります。「x, yが自然数」というのは、「x, yがともに正の整数」ということだから、式で書けば「$x>0, y>0$」ということになります。もう少し進めてみましょう。「x, yは整数」なので、「$x>0, y>0$」は「$x\geq1, y\geq1$」と書き直せます。

ということは、移項すると「$x-1\geq 0,\ y-1\geq 0$」となります。つまり、「$x,\ y$が自然数」と「$x-1\geq 0,\ y-1\geq 0$」は同値の関係になります。これがまず第一。

次に、*式は$x-1$と$y-1$の積です。先ほどの条件の変形から、$x-1\geq 0,\ y-1\geq 0$がわかりましたから、掛けて 10 になる整数のうち、正の整数だけ考えればよいことになります。

ここで、表を書きます。

$x-1$	$y-1$	x	y
1	10	2	11
2	5	3	6
5	2	6	3
10	1	11	2

4 通りできましたね。そうしたら、この表から答を書いて終わりです。

あ、そうそう。表の左 2 列から右 2 列へは、それぞれ 1 を足せばいいんですよ。表の 1 段目の文字式を見ればわかるでしょう。

だから、答は$(x,\ y)=(2,\ 11),\ (3,\ 6),\ (6,\ 3),\ (11,\ 2)$です。

〔解答〕

$$xy-x-y=9$$
$$xy-x-y+1=10$$
$$(x-1)(y-1)=10$$

ここで、$x,\ y$は自然数だから、

$x-1$	$y-1$	x	y
1	10	2	11
2	5	3	6
5	2	6	3
10	1	11	2

$\therefore\quad (x,\ y)=(2,\ 11),\ (3,\ 6),\ (6,\ 3),\ (11,\ 2)$

はい、応用編です。この問題の条件を「$x,\ y$が整数」としてやってみましょう。

解答だけ書いておきます。

〔解答〕

$$xy-x-y=9$$
$$xy-x-y+1=10$$
$$(x-1)(y-1)=10$$

ここで、$x,\ y$は整数だから、

$x-1$	$y-1$	x	y
1	10	2	11
2	5	3	6
5	2	6	3
10	1	11	2
−1	−10	0	−9
−2	−5	−1	−4
−5	−2	−4	−1
−10	−1	−9	0

$\therefore\quad (x,\ y)=(2,\ 11),\ (3,\ 6),\ (6,\ 3),\ (11,\ 2),\ (0,\ -9),\ (-1,\ -4),\ (-4,\ -1),\ (-9,\ 0)$

注意点としては、0 は整数に含まれることを忘れないように。

はい、それでは(3)に移ります。

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$

これも、(1)・(2)と同じパターンです。違いは分数ということだけですね。重要事項の(ⅱ)にあるように、分母を払えば(2)と同じ解き方になります。

xもyも分母にあるので、0 ではありません。分数の分母に文字があれば、「分母$\neq 0$」を常に考えましょう。分数の存在条件ですね。xもyも 0 ではないので、両辺に掛けることができます。これを考慮に入れないと必要十分が成り立たなくなります。両辺に文字を掛ける場合は、0 でないことを確認しましょう。

え、「何で?」って?

例えば、2 と 3 があるとしましょう。等しくない 2 数ですね。それぞれに 0 を掛けてみましょう。そうすると、0 と 0 になって等しくなりますね。でも、元の 2 と 3 は等しくありません。

式で書くと、

$$2 \neq 3$$
$$0 \cdot 2 = 0 \cdot 3$$
$$0 = 0$$

$$0 = 0$$
$$0 \cdot 2 = 0 \cdot 3$$
$$\therefore\ 2 = 3\ \ ?$$

これでは、同値になりません。言い換えれば、答になりません。中学までは常に必要十分を満たす計算や公式ばかりでしたが、高校では、まず存在して、必要十分を満たすことを求められます。わからない人は、論理編を参照してください。

$A = B$ のとき、
$m \neq 0$ ならば、
$mA = mB$、または $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{m}$

これが必要十分条件を表す等式の性質です。$m \neq 0$ に注意してください。

はい、ちょっと話が逸れましたが、両辺に xy を掛けます。でも、右辺の $\dfrac{1}{4}$ が分数として残ってしまいますね。だから、両辺に $4xy$ を掛けます。

$$4y + 4x = xy$$

移項すると、

$$xy - 4x - 4y = 0$$

どうですか。(2)と同じ形になったでしょう。

ここからは、(2)と同じ解法で十分です。x, y の係数がそれぞれ 4 ですから、両辺に 16 を加えて、

$$(x-4)(y-4) = 16$$

この次は、表ですね。でも、その前に、条件を考えましょう。x, y は自然数なので、$x \geq 1,\ y \geq 1$。よって、$x-1 \geq 0,\ y-1 \geq 0$。

この両辺から 3 を引いて、$x-4 \geq -3,\ y-4 \geq -3$。つまり、$x-4$ も $y-4$ も -3 以上の整数で考えればよいわけです。

掛けて 16 になる 2 つの整数の組合せは、

$$(1, 16),\ (2, 8),\ (4, 4),\ (8, 2),\ (16, 1),\ (-1, -16),\ (-2, -8),\ (-4, -4),\ (-8, -2),\ (-16, -1)$$

の 10 通りです。このうち、さっきの「2 つとも -3 以上の整数」という条件を加味すれば、負の数の組合せはすべて不適になりますね。

だから、表は、次のようになります。

$x-4$	$y-4$	x	y
1	16	5	20
2	8	6	12
4	4	8	8
8	2	12	6
16	1	20	5

よって、答は、$(5, 20),\ (6, 12),\ (8, 8),\ (12, 6),\ (20, 5)$

はい、それでは解答に移ります。

〔解答〕

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$$

分母を払って整理すると、

$$xy - 4x - 4y = 0$$
$$(x-4)(y-4) = 16$$

ここで、x, y は自然数だから、

$x-4$	$y-4$	x	y
1	16	5	20
2	8	6	12
4	4	8	8
8	2	12	6
16	1	20	5

よって、$(x, y) = (5, 20),\ (6, 12),\ (8, 8),\ (12, 6),\ (20, 5)$

はい、質問はありませんか。

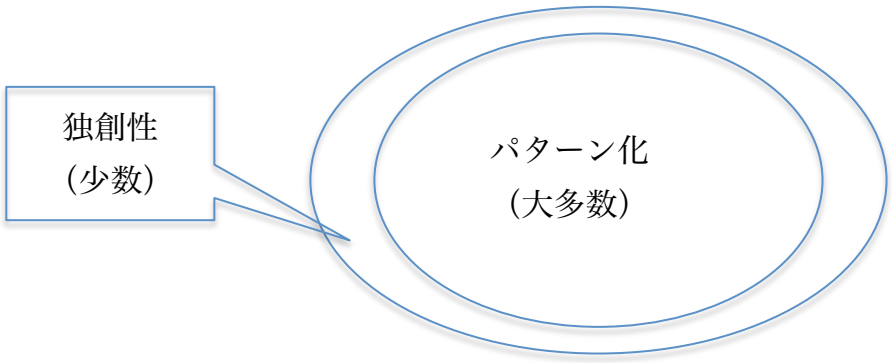
実際にやってみるとわかるように、(1)〜(3)は同一のパターンです。このパターンをしっかりつかみましょう。

整数方程式の一つのパターンは、「無理矢理因数分解して、表を書く」です。
(1)は無理しなくとも因数分解できる問題、(2)は無理矢理因数分解する問題、(3)は分母を払ってこのパターンに持っていく問題です。いずれにしても、この 3 問から重要なことをつかんでください。

それは何かというと、今説明したように、あるパターンに持っていくために最初に一ひねりすることです。そして、そのパターンに当てはまるように工夫することです。

これは数学的考え方の一つで、社会に出て仕事をするのも、大学で研究するのも、事件を解決するのもすべてこのやり方です。小・中・高・大と勉強が進むにつれ、そういうパターンは増えていきます。つまり、社会に出て初めて見るような問題に直面しても、過去に学んだパターンに当てはめることで、解決できる問題は少なくありません。

よく受験勉強の弊害として、「パターン化すること」が言われますが、パターン化することは最も基本的な動物の本能です。理想論だけでなく生物的な側面も含めて、批判すべきなのに、批評する人の知識の狭さや考え方の固定化が見えてしまいます。そもそも「平仮名」や「カタカナ」、「漢字」や「アルファベット」もパターン化されたものだし、昼になったら昼食を食べるというのもパターン化です。そうですねぇ、学校で昼に給食を食べさせるということからして、パターン化を学校で教えているようなものですね。「独創性」が足りないともよく言われますが、独創性というのはパターン化の外にあるものです。ということは、パターン化という枠がなければ独創性も生み出せないのです。つまり、パターン化と独創性の境界条件を設定しないと、独創性という物は定義できないわけですね。ここのところ、言っていることがわかりますかねぇ。「パターン化」という基準を定めなければ、「独創性」というのも定義できないんですよ。大多数の「パターン化」があるからこそ、少数の「独創性」が生まれるのです。なのに、その「パターン化」を知らなければ独創的な考えや物は生み出せないでしょう。



だから、学びの第一歩は、「パターン化」の方法を身に付けることから始まります。
第二は、いろいろなものをパターン化してデータを集めることです。
数多くやると、パターン化の境界（限界）がわかります。そこから外側にあるものが独創性ですね。

パターン化せずに、世の中の人々の思考の外側にある独創的なものを作る人は天才であって、普通の公教育では天才を作ることはできません。だからこそ、トップクラスの大学では入試問題で独創的な解答をする受験生を求めているのです。普通の人にとっては、「パターンの個数を増やす」ことが重要です。数学で言えば、「パターンの個数を増やす」＝「解法の個数を増やす」＝「いろいろな問題が解けるようにする」ことです。

ちょっと話がずれましたが、ずれているのは今の教育界の教育理論の先生方だと思います。話を元に戻します。

それでは、(4)で「x, y が自然数」という条件を「x, y が整数」という条件でやってみてください。

解答の答だけ書いておきます。

$(x, y)=(5, 20), (6, 12), (8, 8), (12, 6), (20, 5), (-5, -20), (-6, -12), (-8, -8), (-12, -6), (-20, -5)$

表で負の数の分も含めればよいわけですから、答は 10 個になります。

はい、それでは(4)に移ります。
(4) $5x+3y=50$

これと同じ問題が共立女子大だったかな、どっかの女子大に出たり、センター試験にも頻出しています。結論から言ってしまえば、この形は約数・倍数の問題です。なぜそういう見方をするのか、それが解き方を見つける鍵にもなります。

さあ、(1)〜(3)の問題と、この(4)の問題の違いを問題の式から見つけることができますか。
ヒント!「科学する」の内容を思い出してください。

一つ目は、(1)〜(3)は 2 次式、または分母を払えば 2 次式、つまり x^2 とか xy の項があるけれども、(4)は 1 次式ですね。

二つ目は、(4)では $5x$ と 50 に共通点があることです。確かに、(2)でも $-x, -y$ という共通点、(3)でも分母を払えば $-4x, -4y$ という共通点はありますが、次のような場合はどうでしょう。

⑵’ $6xy-2x-3y=23$　　⑶’ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{3}$

これらについては共通点がなくなります。

⑷では、$5x$ と 50 が両方とも 5 の倍数であることに着目しましょう。5 の倍数ということは、5 で括れるということですね。だから、$5x$ を移項して 5 で括ってみます。

$5x+3y=50$

$3y=50-5x$

$3y=5(10-x)$　　…*

はい、ここでこの式をよく見てみましょう。どんなことに気付きますか。＝の性質をよく考えてください。

(ⅰ)左辺は、3 の倍数。よって、右辺も 3 の倍数

(ⅱ)右辺は、5 の倍数。よって、左辺も 5 の倍数

(ⅲ)y は自然数だから、左辺は、正。よって、右辺も正

パッと見て、これだけのことを見抜けるようになりましょう。

順番に整理していきましょう。

(ⅰ)左辺は、3 の倍数。よって、右辺も 3 の倍数。ここで、5 は 3 の倍数でないから、$10-x$ が 3 の倍数。…(ⅰ)’

今、「5 は 3 の倍数でない」と言いましたが、このことを数学では、「5 と 3 は互いに素である」と言います。忘れた人は、重要事項の第 1 章の「Ⅱ.数と式の性質」の「4.約数･倍数」の「⑵性質」の※印を見ておきましょう。授業で言えば、第 3 回の授業ですね。もう一度復習すると、「互いに素」というのは、「1 以外に公約数を持たない関係」のことですね。だから、「5 と 3 は 1 以外に公約数を持たない」＝「5 と 3 は互いに素である」ということになります。

閑話休題。閑話休題の意味がわからない人は、国語辞典で意味を調べておきましょう。「わからないことは、すぐその場で調べる」は、学問に限らず仕事でも何でも鉄則です。自分を向上させる手段をしっかり持っておきましょう。

はい、次の(ⅱ)も同じような内容ですね。

(ⅱ)右辺は、5 の倍数。よって、左辺も 5 の倍数。ここで、3 と 5 は互いに素だから、y は 5 の倍数。…(ⅱ)’

次、(ⅲ)に移ります。

(ⅲ)y は自然数だから、左辺は、正。よって、右辺も正

ということは、式で表すと、

$5(10-x)>0$

$10-x>0$

$\therefore\quad x<10$

このとき、x は自然数なので、$x>0$

$\therefore\quad 0<x<10$

言い換えれば、

$1\leq x\leq 9$　　…(ⅲ)’

ここで、(ⅰ)～(ⅲ)を整理した(ⅰ)’～(ⅲ)’を並べてみましょう。

(ⅰ)’　$10-x$ は 3 の倍数

(ⅱ)’　y は 5 の倍数

(ⅲ)’　$1\leq x\leq 9$

(ⅰ)’と(ⅲ)’は x についての関係で、(ⅱ)’だけ y についての内容ですね。だから、x という共通点のある(ⅰ)’と(ⅲ)’でまず考えてみます。

x は、$1\leq x\leq 9$ で、かつ $10-x$ は 3 の倍数である

ことがわかります。

ここで、$1\leq x\leq 9$ より $-9\leq -x\leq -1$ だから、全辺に 10 を加えて、$1\leq 10-x\leq 9$。この中で、3 の倍数になるのは、

$10-x=3,\ 6,\ 9$

$\therefore\quad x=7,\ 4,\ 1$

x が出てきました。そうしたら、*印の式に代入して、y を求めます。

$y=5,\ 10,\ 15$

「何だ、(ⅱ)’は使わないのか」と思った人は、いませんか。答の y の形をよく見てください。ちゃんと 5 の倍数になっているでしょ。確認（検算）で役立っているでしょう。

はい、それでは解答に移ります。

〔解答〕

$5x+3y=50$ より、

$$3y=50-5x$$

$$3y=5(10-x) \qquad \cdots *$$

ここで、x, y は自然数で、3 と 5 は互いに素だから、

$10-x>0$、かつ$10-x$ は 3 の倍数である。

これを満たす自然数 x は、 $x=7,\ 4,\ 1$

*に代入して、 $y=5,\ 10,\ 15$

$\therefore \quad (x,\ y)=(7,\ 5),\ (4,\ 10),\ (1,\ 15)$

解答に書かれている以外に、どれだけのことを考えているかわかりますか。数学は、思考の学問です。特に試験となれば解答欄の大きさによって、どの文を書き、どの文を省略しなければならないか、判断に迷うことがありますが、できるだけ解答欄一杯になるよう書き込みましょう。

はい、これで整数方程式の解説は終わりますが、まだまだパターンはあります。それらは演習でしっかり練習して、解答･解説で考え方を身に付けていきましょう。

最後にまとめておきます。

〈1〉 整数方程式で、2 次式ならば、無理矢理にでも因数分解して表を書き、一つ一つ当てはめる

〈2〉 整数方程式で、1 次式ならば、約数･倍数で考える

〈3〉 整数方程式でなく、○の倍数という場合は、連続整数の積を考える。このときも無理矢理因数分解する